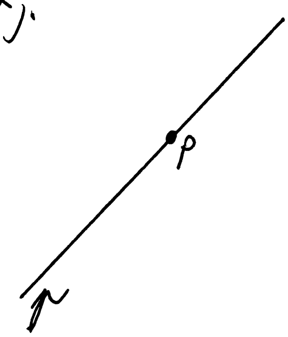
(#) Neka je $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ metrička geometrija i neka su $P \in \mathcal{S}$, $p \in \mathcal{L}$ t.d. $P \in p$, i neka je $s \in \mathbb{R}$. Pokazati da na pravoj p postoji najmanje jedna tačka Q t.d. $d(P,Q) = s$.

Rj.



$\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ metrička geometrija $\Rightarrow$

$\exists$ koordinatni sistem $f : p \to \mathbb{R}$ za pravu p.

Kako je f surjekcija to za realnu vrijednost $f(P) - s$ postoji tačka Q t.d. $f(Q) = f(P) - s$.

Kako je

$$d(P,Q) = |f(P) - f(Q)| = |f(P) - f(P) + s| = s$$

to je Q tražena tačka.

Neka je $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ geometrija incidencije. Pretpostavimo da za svaku pravu $p \in \mathcal{L}$ postoji bijekcija $f_p : p \to \mathbb{R}$. Pokazati da tada postoji f-ja udaljenosti d takva da je $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ metrična geometrija u kojoj je svaka bijekcija $f_p : p \to \mathbb{R}$ mjera.

Rj.

Za svaku pravu $p \in \mathcal{L}$ postoji bijekcija $f_p : p \to \mathbb{R}$.

$\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ geometrija incidencije $\Rightarrow$
- $\forall$ dvije tačke $A, B \in \mathcal{S}$ $\exists! \ell \in \mathcal{L}$ $A \in \ell, B \in \ell$
- $\exists$ skup od tri nekolin. tačke

Izaberimo proizvoljne dvije tačke $M, N \in \mathcal{S}$, i ako je $M \neq N$, s obzirom da je $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ geometrija incidencije, jedinstvenu pravu koja prolazi kroz tačke M i N označimo sa p.
Definišimo udaljenost d na sljedeći način

$$d(M,N) = \begin{cases} |f_p(M) - f_p(N)|, & \text{ako je } M \neq N \\ 0, & \text{ako je } M = N \end{cases}$$

Pokažimo da je ovako definisano d f-ja udaljenosti

$d(M,N) \geq 0$

$M = N \Rightarrow d(M,N) = 0$

$M \neq N \Rightarrow d(M,N) = |f_p(M) - f_p(N)| > 0$

vrijedi prva tvrdnja

(f_p je bijekcija $\Rightarrow f_p(M) \neq f_p(N)$ i nisu obe nula)

$d(M,N) = 0$ akko $M = N$

$d(M,N) = 0 \Rightarrow M = N$ ili $|f_p(M) - f_p(N)| = 0$

$\Downarrow$

$f_p(M) = f_p(N) \overset{f_p \text{ bijek.}}{\Longrightarrow} M = N$

Ako je $M = N \Rightarrow d(M,N) = 0$

vrijedi druga osobina

$d(M,N) = d(N,M)$

$M = N \Rightarrow d(M,N) = 0 = d(N,M)$

$M \neq N \Rightarrow d(M,N) = |f_p(M) - f_p(N)| = |f_p(N) - f_p(M)| = d(N,M)$

vrijedi treća osobina

d jest f-ja udaljenosti

Kako je f_p bijekcija sa p na $\mathbb{R}$, i s obzirom da vrijedi jednačina mjere $|f_p(M) - f_p(N)| = d(M,N)$

to je $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ metrička geometrija.

Neka je d^* f-ja udaljenosti definisana na $\mathbb{R}^2$ na sljedeći način

$$d^*(P,Q)=\begin{cases} d_E(P,Q), & \text{ako je } d_E(P,Q)\le 1 \\ 1, & \text{ako je } d_E(P,Q)>1. \end{cases}$$

Pokazati da ne postoji geometrija incidencije na $\mathbb{R}^2$ takva da je $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}, d^*\}$ metrička geometrija. (Time, ne proizvodi svaka udaljenost metričku geometriju).

Rj.

Prisjetimo se: Apstraktna geometrija $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ je geometrija incidencije ako i samo ako

(i) Svake dvije različite tačke u $\mathcal{S}$ pripadaju jedinstvenoj pravoj.

(ii) Postoji skup od tri nekolinearne tačke.

Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da postoji skup linija $\mathcal{L}$ takvih da je $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}\}$ geometrija incidencije, kao i da je $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}, d^*\}$ metrička geometrija. Ovo znači da svaka prava iz $\mathcal{L}$ ima mjeru tj. postoji mjera $f: p \to \mathbb{R}$ za svaku pravu $p \in \mathcal{L}$.

Pa izaberimo neku konkretnu pravu p. Kako je f bijekcija sa p na $\mathbb{R}$ to postoji tačka P čija je koordinata 0 ($f(P)=0$), i postoji tačka R čija je koordinata 2 ($f(R)=2$). Kako f zadovoljava jednačinu mjere imamo da

$$d^*(P,R)=|f(P)-f(R)|=|0-2|=2 \Rightarrow d^*(P,R)=2$$

#kontradikcije ($d^*(P,R)=1$ po definiciji)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Ne postoji geometr. incid. td. je $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}, d^*\}$ metr. geom.

(#) Neka je $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ metrička geometrija i neka je $P \in \mathcal{S}$ proizvoljna tačka. Pokazati da za svako $r > 0$ postoji tačka u $\mathcal{S}$ koja je na udaljenosti r od tačke P.

Rj.

Kako je $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ metrička geometrija to postoji koordinatni sistem (ili mjera) f t.d. $d(P,Q) = |f(P) - f(Q)|$ $\forall P, Q \in \mathcal{S}$.

Označimo sa p pravu na kojoj leži data tačka P ($P \in p$).

Mjera $f: p \to \mathbb{R}$ je bijekcija sa p u $\mathbb{R}$, pa vrijednost $f(P)$ označimo sa a ($f(P) = a$).

Kako je f surjekcija to $\exists$ tačka $Q \in p$ t.d. $f(Q) = \underset{r>0}{a - r}$.

Za ovako odabranu tačku Q sad imamo

$$d(P,Q) = |f(P) - f(Q)| = |a - a + r| = r$$

Time smo pronašli tačku u $\mathcal{S}$ koja je na udaljenosti r od tačke P.

(#) Definišimo maksimalnu udaljenost (ili supremum udaljenosti) d_s na $\mathbb{R}^2$ na sljedeći način

$$d_s(P,Q) = \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}$$

gdje su $P(x_1,y_1)$ i $Q(x_2,y_2)$.

(i) Pokazati da je d_s f-ja udaljenosti.

(ii) Pokazati da je $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_s\}$ metrična geometrija.

Rj.

(i) Da bi pokazali da je d_s f-ja udaljenosti potrebno je i dovoljno pokazati da su zadovoljene tri osobine iz definicije f-je udaljenosti.

$d(P,Q) \geq 0$

$$d_s(P,Q) = \max\{\underbrace{|x_1-x_2|}_{\geq 0}, \underbrace{|y_1-y_2|}_{\geq 0}\} \geq 0 \implies$$ vrijedi prva osobina

$d(P,Q)=0$ akko $P=Q$.

$$d_s(P,Q)=0 \iff \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\} = 0 \iff$$

$$\iff |x_1-x_2|=0 \text{ i } |y_1-y_2|=0 \iff \begin{matrix} x_1=x_2 \\ y_1=y_2 \end{matrix} \iff P=Q$$

vrijedi druga osobina

$d(P,Q) = d(Q,P)$

$$d_s(P,Q) = \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\} = \max\{|x_2-x_1|, |y_2-y_1|\} = d_s(Q,P)$$

vrijedi druga osobina.

F-ja d_s jest f-ja udaljenosti.

(ii) Da bi pokazali da je $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_s\}$ metrička geometrija potrebno je i dovoljno pokazati da svaka prava iz $\mathcal{L}_E$ ima mjeru. Podijelimo dokaz na dva dijela.

1° Posmatrajmo pravu L_a.

$P, Q \in L_a \Rightarrow d_s(P,Q) = \max\{|a-a|, |y_1-y_2|\} = |y_1-y_2|$

Definišimo f-ju $f: L_a \to \mathbb{R}$ na sljedeći način $f(R) = f((x,y)) = y \; \forall R \in L_a$, i pokažimo da je f mjera (koordinatni sistem).

f JE INJEKCIJA

$$\left.\begin{array}{l} P,Q \in L_a \Rightarrow x_1 = x_2 = a \\ f(P) = f(Q) \Rightarrow y_1 = y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow P = Q, \; f \text{ je injekcija}$$

f JE SURJEKCIJA

$\forall t \in \mathbb{R}$ imamo da $f(R) = t$ gdje je $R(a,t)$ $(R \in L_a)$.

f ZADOVOLJAVA JEDNAČINU MJERE

$$d_s(P,Q) = \max\{|a-a|, |y_1-y_2|\} = |y_1-y_2| = |f(P) - f(Q)|$$

Možemo zaključiti da svaka prava L_a ima mjeru.

2° Posmatrajmo pravu $L_{m,b}$.

$P, Q \in L_{m,b}$ $\quad d_s(P,Q) = \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\} = \left| \begin{array}{l} P \in L_{m,b} \Rightarrow y_1 = mx_1 + b \\ Q \in L_{m,b} \Rightarrow y_2 = mx_2 + b \\ y_1 - y_2 = mx_1 - mx_2 \end{array} \right|$

$$= \max\{|x_1-x_2|, |m|\,|x_1-x_2|\} \quad \dots (*)$$

Definišimo f-ju $g: L_{m,b} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način $g((x,y)) = \begin{cases} x, & |m| \le 1 \\ y, & |m| > 1 \end{cases}$

Pokažimo da je ovako definisana f-ja g mjera za pravu $L_{m,b}$.

g JE INJEKCIJA

(a) $|m| \leq 1$

$$\left.\begin{array}{ll} g(P)=g(Q) \Rightarrow & x_1 = x_2 \\ P,Q \in L_{m,b} \Rightarrow & Y_1 = x_1 m + b \\ & Y_2 = m x_2 + b \end{array}\right\} \Rightarrow P=Q$$

(b) $|m| > 1$

$$g(P)=g(Q) \Rightarrow Y_1 = Y_2 \xRightarrow[Y_2 = m x_2 + b]{Y_1 = m x_1 + b} x_1 = x_2 \Rightarrow P = Q$$

g jest injekcija

g JE SURJEKCIJA

(a) $|m| \leq 1$

$t \in \mathbb{R}$, $R(t, mt+b) \Rightarrow g(R)=t$ i $R \in L_{m,b}$

(b) $|m| > 1$

$t \in \mathbb{R}$, $M\left(\frac{t-b}{x_1}, t\right) \Rightarrow g(M) = t$ i $M \in L_{m,b}$

g jest surjekcija

g ZADOVOLJAVA JEDNAČINU MJERE

(a) $|m| \leq 1$

$$d_S(P,Q) \overset{(*)}{=} \max\{|x_1 - x_2|, |m|\,|x_1 - x_2|\} = |x_1 - x_2| = |g(P) - g(Q)|$$

(b) $|m| > 1$

$$d_S(P,Q) \overset{(*)}{=} \max\{|x_1 - x_2|, |m|\,|x_1 - x_2|\} = |Y_1 - Y_2| = |g(P) - g(Q)|$$

Možemo zaključiti da svaka prava $L_{m,b}$ ima mjeru.

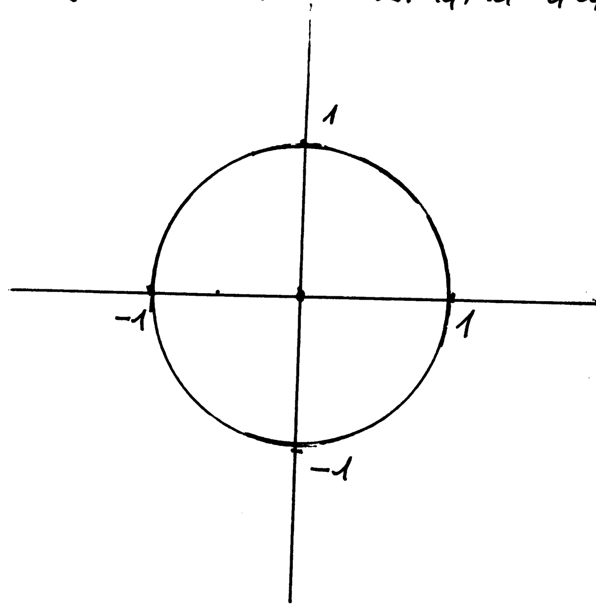
Kako model $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_S\}$ zadovoljava postulat mjere to možemo zaključiti da je $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_S\}$ metrička geometrija.

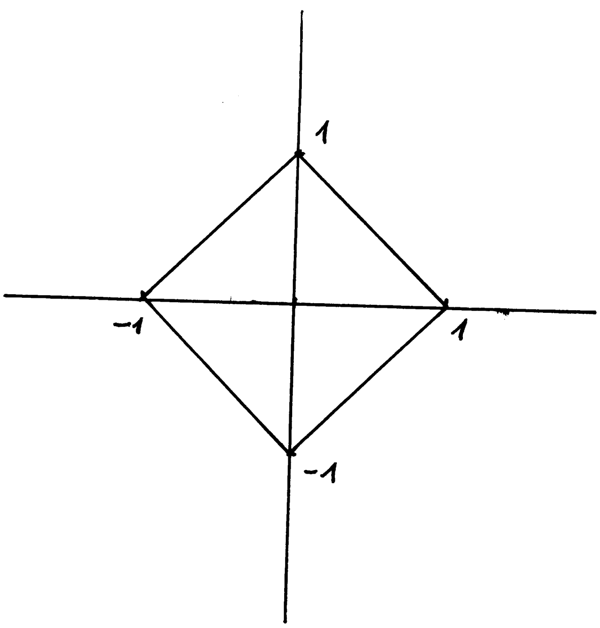
(#) U metričkoj geometriji $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ krug sa centrom u P $(P \in \mathcal{S})$ i poluprečnikom r $(r>0)$ je $\mathcal{C} = \{Q \in \mathcal{S} \mid d(P,Q) = r\}$.
Nacrtati krugove poluprečnika 1 sa centrom u $(0,0)$ u $\mathbb{R}^2$ za svaku od tri date udaljenosti d_E, d_T i d_S, gdje su d_E Euklidova udaljenost, d_T taxi udaljenost i d_S maksimalna udaljenost.

Rj. $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$

$$d_E = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\{Q \in \mathcal{S} \mid d_E((0,0), Q) = 1\} =$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}$$



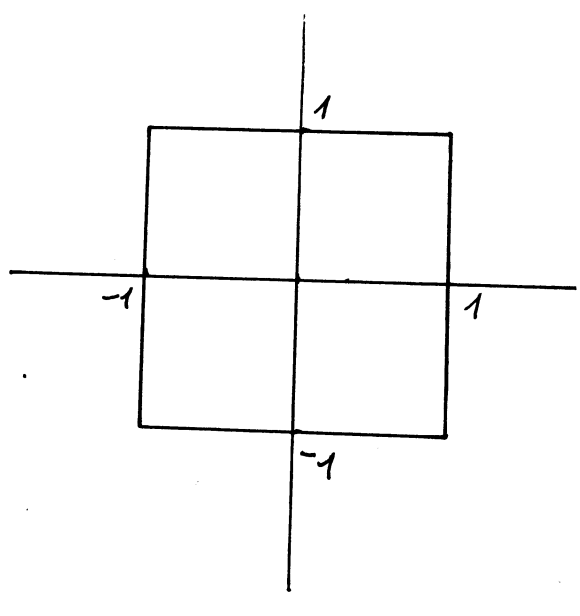


$$d_T(P,Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

$$\{Q \in \mathcal{S} \mid d_T((0,0), Q) = 1\} =$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$$

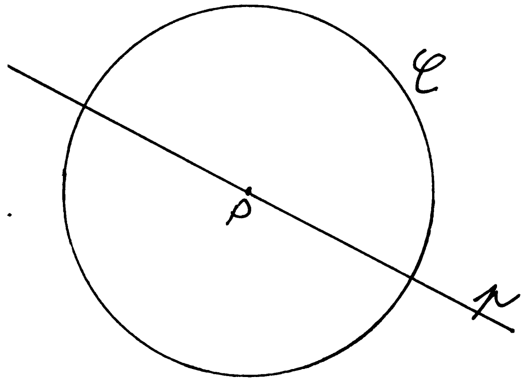
$$d_S(P,Q) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

$$\{Q \in \mathcal{S} \mid d_S((0,0), Q) = 1\} =$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} = 1\}$$



Neka je $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ metrička geometrija i neka su $P \in \mathcal{S}$, $p \in \mathcal{L}$ t.d. $P \in p$. Označimo sa $\mathcal{C} = \{Q \in \mathcal{S} \mid d(P,Q) = r\}$ krug sa centrom u P. Pokazati da $p \cap \mathcal{C}$ sadrži tačno dvije tačke.

Rj.



$\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ je metrička geometrija $\Rightarrow$

$\Rightarrow$
- $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ je geometrija incidencije
- d je f-ja udaljenosti
- svaka prava u $\mathcal{L}$ ima mjeru

Pretpostavimo da prava p i krug $\mathcal{C}$ imaju 3 ili više zajedničkih tačaka, npr. $A, B, C \in p \cap \mathcal{C}$ ($A \neq B$, $A \neq C$ i $B \neq C$). Tada imamo da je $d(P,A) = r$, $d(P,B) = r$ i $d(P,C) = r$.

Neka je $f : p \to \mathbb{R}$ mjera za pravu p (prisjetimo se da je f bijekcija sa p na $\mathbb{R}$) i neka je $f(P) = \rho$. Sad imamo

$$d(P,A) = |f(P) - f(A)| = |\rho - f(A)| \Rightarrow |\rho - f(A)| = r$$
$$d(P,B) = |f(P) - f(B)| = |\rho - f(B)| \Rightarrow |\rho - f(B)| = r$$

$$|\rho - f(A)| = r \Rightarrow f(A) = \rho - r \text{ ili } f(A) = \rho + r$$
$$|\rho - f(B)| = r \Rightarrow f(B) = \rho - r \text{ ili } f(B) = \rho + r$$

Kako je f 1-1 i kako je $A \neq B$ to je $f(A) \neq f(B)$. Pa pretpostavimo da je $f(A) = \rho - r$ i $f(B) = \rho + r$. (slično bi imali i ako bi pretpostavili da je $f(A) = r + \rho$ i $f(B) = \rho - r$)

$$d(P,C) = |f(P) - f(C)| = |\rho - f(C)| \Rightarrow |\rho - f(C)| = r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(C) = \rho - r \text{ ili } f(C) = \rho + r$$

\# kontradikcija

($f(A) = \rho - r$ i $f(B) = \rho + r$)

Pretpostavka da prava p i krug $\mathcal{C}$ imaju tri zajedničke tačke nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome presjek može imati 2 ili manje tački.

Pokažimo da u presjeku imaju najmanje dvije tačke. Kako je $f: p \to \mathbb{R}$ bijekcija to postoje tačke $M, N \in p$ za koje vrijedi $f(M) = f(P) + r$ i $f(M) = f(P) - r$.

Kako je

$$d(P, M) = |f(P) - f(M)| = r \quad \text{to} \quad M \in \mathcal{C}$$

$$d(P, N) = |f(P) - f(M)| = r \quad \text{to} \quad N \in \mathcal{C}$$

Možemo zaključiti da $p \cap \mathcal{C}$ sadrži tačno dvije tačke.

Posebni koordinatni sistemi

Teorema

Neka je f koordinatni sistem za pravu p u metričkoj geometriji, i neka su $a \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon = \pm 1$. Ako je $h_{a,\varepsilon} : p \to \mathbb{R}$ f-ja definisana sa

$$h_{a,\varepsilon}(P) = \varepsilon\big(f(P) - a\big)$$

tada je $h_{a,\varepsilon}$ koordinatni sistem za p.

Dokaži prethodnu teoremu.

Rj.

$$h_{a,\varepsilon} : p \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow \varepsilon(f(x,y) - a)$$

$$a \in \mathbb{R}, \ \varepsilon = \pm 1$$

Trebamo pokazati da je $h_{a,\varepsilon}$ bijekcija, i da zadovoljava jednačinu mjere.

$h_{a,\varepsilon}$ JE INJEKCIJA

$P(x_1, y_1), \ Q(x_2, y_2), \ P, Q \in p$

$$h_{a,\varepsilon}(P) = h_{a,\varepsilon}(Q) \Rightarrow \varepsilon(f(x_1,y_1) - a) = \varepsilon(f(x_2,y_2) - a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1,y_1) - a = f(x_2,y_2) - a \Rightarrow f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \overset{f \text{ je mjera}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \ i \ y_1 = y_2 \Rightarrow P = Q$$ $h_{a,\varepsilon}$ je injekcija

$h_{a,\varepsilon}$ JE SURJEKCIJA

Neka je $t \in \mathbb{R}$ proizvoljna vrijednost.

Posmatrajmo vrijednost $\frac{t}{\varepsilon} + a$. Kako je f surjekcija to $\exists R \in p$ t.d. $f(R) = \frac{t}{\varepsilon} + a$. Ali sad imamo i

$$h_{a,\varepsilon}(R) = \varepsilon(f(R) - a) = \varepsilon\left(\left(\frac{t}{a} + a\right) - a\right) = t$$ $\rightarrow$ $h_{a,\varepsilon}$ je surjekcija

$h_{a,\varepsilon}$ ZADOVOLJAVA JEDNAČINU MJERE.

$$|h_{a,\varepsilon}(P) - h_{a,\varepsilon}(Q)| = |\varepsilon(f(P) - a) - \varepsilon(f(Q) - a)| =$$

$$= |\varepsilon| \, |f(P) - f(Q)| \overset{\varepsilon = \pm 1}{=} |f(P) - f(Q)| = d(P,Q)$$

f je koordinatni sistem

Prema tome, $h_{a,\varepsilon}$ jest koordinatni sistem za p.

(#) Neka je f koordinatni sistem za pravu p u metričnoj geometriji. Definišimo $h_{a,\varepsilon}: p \to \mathbb{R}$ na sljedeći način

$$h_{a,\varepsilon}(P) = \varepsilon(f(P) - a)$$

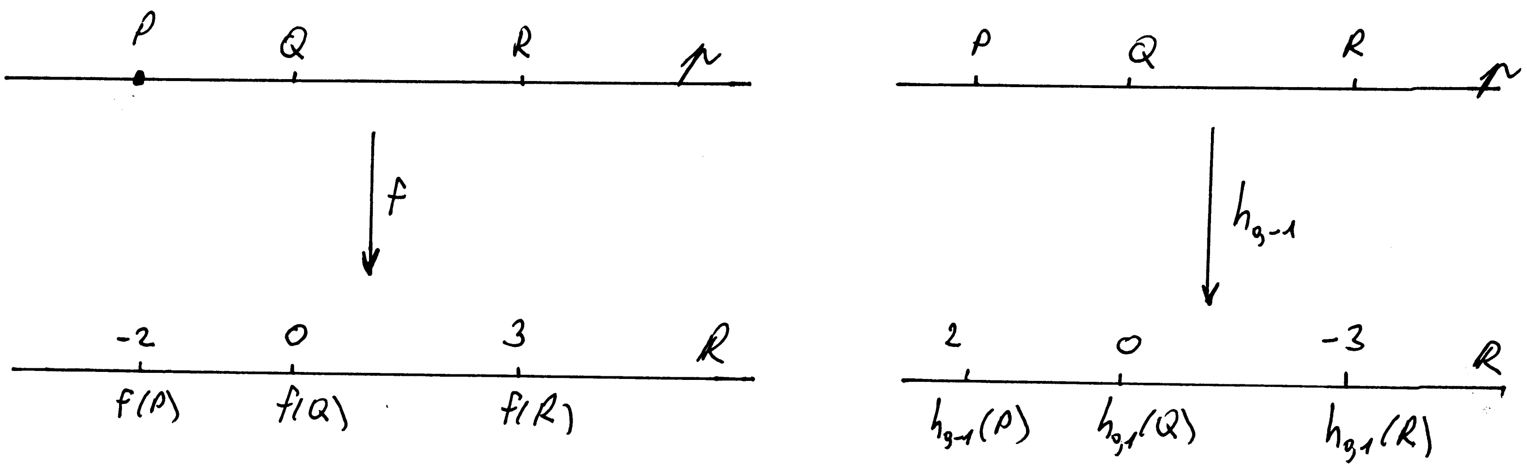
(gdje je $a \in \mathbb{R}$, a ε je ± 1). Objasniti i geometrijski prikazati razliku između

(i) f i $h_{a,-1}$.

(ii) f i $h_{a,1}$.

Rj.

(i) Izaberimo tačke P, Q i R za koje vrijedi da je $f(P) = -2$, $f(Q) = 0$, $f(R) = 3$. Tada je $h_{a,-1}(P) = 2$, $h_{a,-1}(Q) = 0$, $h_{a,-1}(R) = -3$



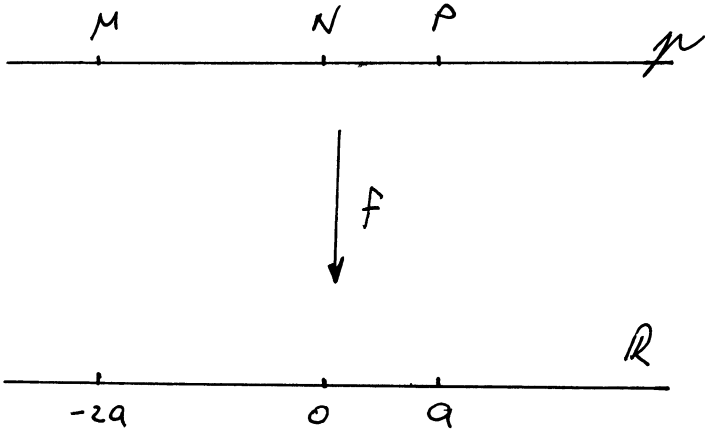
Drugim riječima $h_{a,-1}$ razmjeni (promjeni položaj) pozitivnim i negativnim tačkama prave p u odnosu na f. Drugim riječima $h_{a,-1}$ ima efekat refleksije mjere f oko tačke Q (ako je $f(Q) = 0$).

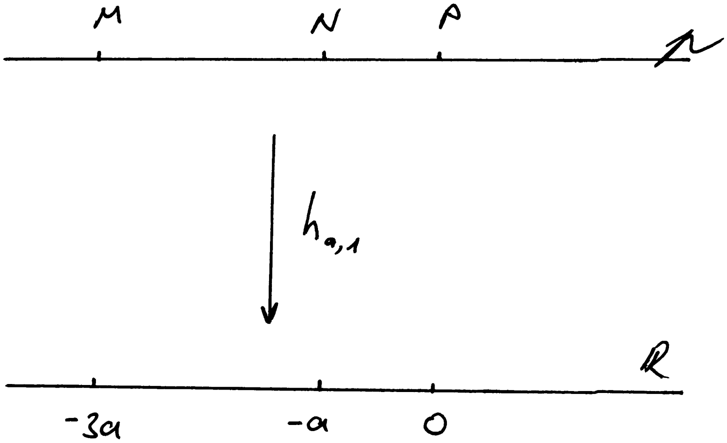
(ii) Neka su M, N i P tačke za koje vrijedi da je $f(M) = -2a$, $f(N) = 0$ i $f(P) = a$. Tada je

$h_{a,1}(M) = 1(f(M) - a) = -3a$

$h_{a,1}(P) = 1(f(P) - a) = 0$

$h_{a,1}(N) = 1\cdot(f(N) - a) = -a$





Efekat od $h_{a,1}$ je translacija koordinatnog sistema za vrijednost $a \in \mathbb{R}$.

(#) Neka je p prava u metričnoj geometriji i neka su A i B tačke na pravoj p. Pokazati da postoji koordinatni sistem g za pravu p sa osobinom da je $g(A)=0$ i $g(B)>0$.

Rj.

Prisjetimo se teoreme: Ako je f koordinatni sistem za pravu p u metričnoj geometriji i ako su $a\in\mathbb{R}$ i $\varepsilon=\pm 1$ tada je

$$h_{a,\varepsilon}: p \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$P \longrightarrow \varepsilon(f(P)-a)$$

koordinatni sistem za p.

Neka je $f: p\to\mathbb{R}$ koordinatni sistem za p i neka je $a=f(A)$.
Ako je $f(B)>a$ neka je $\varepsilon=+1$.
Ako je $f(B)<a$ neka je $\varepsilon=-1$.

Prema Teoremi iznad f-ja $g=h_{a,\varepsilon}$ je koordinatni sistem za p i vrijedi

$$g(A)=h_{a,\varepsilon}(A)=\varepsilon(f(A)-a)=\varepsilon\cdot 0=0$$

$$g(B)=h_{a,\varepsilon}(B)=\varepsilon(f(B)-a)=|f(B)-a|>0.$$

Prema tome, g je koordinatni sistem sa željenim osobinama.

Definicija (koordinatni sistem sa tačkom A kao koordinatnim početkom i tačkom B pozitivnom)

Neka je $p = p(A, B)$. Ako je g koordinatni sistem za pravu p sa osobinom da je $g(A) = 0$ i $g(B) > 0$, tada g nazivamo koordinatni sistem sa tačkom A kao koordinatni početak i tačkom B pozitivnom).

(#) U Euklidovoj ravni pronaći mjeru f takvu da $f(P)=0$ i $f(Q)>0$ za dati par tačaka P i Q:

(i) $P(2,3)$, $Q(2,-5)$;

(ii) $P(2,3)$, $Q(4,0)$.

Rj.

(i) $P(2,3)$
$Q(2,-5)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \overset{P,Q}{\Longrightarrow} \frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{-8}$$

Primjetimo da tačke P i Q pripadaju pravoj L_2.

Standardna mjera za tip prave L_a u Euklidovoj ravni je

$$g: L_a \to \mathbb{R}$$
$$(a,y) \to y$$

Primjetimo da je $g(P)=3$, $g(Q)=-5$.

Prisjetimo se: Ako je g koordinatni sistem za pravu μ u metričkoj geometriji tada je f-ja $h_{a,\varepsilon}: \mu \to \mathbb{R}$, gdje je $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon = \pm 1$, definisana sa

$$h_{a,\varepsilon}(R) = \varepsilon(g(R)-a) \qquad \ldots (*)$$

koordinatni sistem za μ.

Definišimo f-ju $f: L_2 \to \mathbb{R}$ na sljedeći način $f(R)=(-1)(g(R)-3)$ za $\forall R \in L_2$. Na osnovu $(*)$ f je mjera za pravu μ.

Primjetimo da je

$$\left.\begin{array}{l} f(P)=(-1)(3-3)=0, \\ f(Q)=(-1)(-5-3)=8>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{mjera } f \text{ zadovoljava date osobine.}$$

(ii) $P(2,3)$ $\quad Q(4,0)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \overset{P,Q}{\Rightarrow} \frac{x-2}{4-2}=\frac{y-3}{-3} \Rightarrow \frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-3}$$

$$y-3=-\frac{3}{2}(x-2)$$

$$y-3=-\frac{3}{2}x+3 \Rightarrow y=-\frac{3}{2}x+6$$

Tačke P i Q pripadaju pravoj $L_{-\frac{3}{2},6}$.

Standardna mjera za pravu tipa $L_{k,n}$ u Euklidovoj ravni je

$$g: L_{k,n} \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to x\sqrt{1+k^2}$$

$k=-\frac{3}{2}$, $k^2=\frac{9}{4}$

$1+\frac{9}{4}=\frac{4}{4}+\frac{9}{4}=\frac{13}{4}$

Prisjetimo se: Ako je g koordinatni sistem za pravu p tada je f-ja

$$h_{a,\varepsilon}: p \to \mathbb{R}$$
$$M \to \varepsilon(g(M)-a) \quad \dots (**)$$

također koordinatni sistem za p (gdje je $a \in \mathbb{R}$, a ε je $+1$ ili -1)

Primjetimo da je $g(P)=2\cdot\sqrt{\frac{13}{4}}=\sqrt{13}$, $g(Q)=4\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}=2\sqrt{13}$.

Definišimo f-ju f na sljedeći način: $f: L_{-\frac{3}{2},6} \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to 1\left(x\frac{\sqrt{13}}{2}-\sqrt{13}\right)$$

Standardna mjera za pravu $L_{-\frac{3}{2},6}$ je

$$g: L_{-\frac{3}{2},6} \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to x\frac{\sqrt{13}}{2}$$

Na osnovu $(**)$ imamo da je f mjera za pravu $L_{-\frac{3}{2},6}$.

Kako je

$f(P)=0$ i $f(Q)=\sqrt{13}>0$ to je f tražena mjera.

(#) U Poincaré-ovoj ravni pronađi mjeru f takvu da $f(P)=0$ i $f(Q)>0$ za dati par tački P i Q

(i) $P(2,3)$, $Q(2,1)$;

(ii) $P(2,3)$, $Q(-1,6)$.

Rj. Prisjetimo se sljedeće teoreme:

Ako je f koordinatni sistem za pravu p u metričkoj geometriji i ako je $h_{a,\varepsilon}: p \to \mathbb{R}$ definisano sa

$$h_{a,\varepsilon}(P) = \varepsilon(f(P)-a)$$

tada je $h_{a,\varepsilon}$ koordinatni sistem za p. ($a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon = \pm 1$).

(i) Primjetimo da date tačke P i Q pripadaju pravoj ${}_aL$, $(a=2)$.

Standardna mjera za ${}_aL$ je

$$g: {}_aL \to \mathbb{R}$$
$$(a,y) \to \ln y$$

Primjetimo da je $g(P) = \ln 3$, $g(Q) = \ln(1) = 0$

Ako u prethodnoj teoremi za a izaberemo $\ln 3$ $(a=\ln 3)$ za ε izaberemo -1 $(\varepsilon=-1)$, to možemo definisati f-ju $h_{\ln 3,-1}: {}_aL \to \mathbb{R}$

$$(a,y) \to (-1)(\ln y - \ln 3)$$

koja je (na osnovu te teoreme) koordinatni sistem za ${}_aL$.

Kako je $h_{\ln 3,-1}(P) = \ln 3 - \ln 3 = 0$ i $h_{\ln 3,-1}(Q) = (-1)(\ln 1 - \ln 3) = \ln 3$

to mjera $h_{\ln 3,-1}$ zadovoljava tražene osobine.

(ii) $P(2,3)$ Primijetimo da je $2 \neq -1$ pa $\exists c, r$ t.d. $P, Q \in {}_cL_r$.
$Q(-1,6)$ Odredimo c i r.

$(x-c)^2 + y^2 = r^2$ $\quad P: \; (2-c)^2 + 3^2 = r^2$

$Q: \; (-1-c)^2 + 6^2 = r^2$

$$(2-c)^2 + 9 = (1+c)^2 + 36$$
$$4 - 4c + \cancel{c^2} + 9 = 1 + 2c + \cancel{c^2} + 36$$
$$-6c = 37 - 13 = 24$$
$$c = -4$$

$$r^2 = (2+4)^2 + 9 = 36 + 9 = 45 = 9 \cdot 5$$
$$r = 3\sqrt{5}$$

Time imamo da $P, Q \in {}_{-4}L_{3\sqrt{5}}$. Standardna mjera za pravu ${}_{-4}L_{3\sqrt{5}}$ je $g: {}_{-4}L_{3\sqrt{5}} \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to \ln \frac{x+4+3\sqrt{5}}{y}$$

Primijetimo da je $g(P) = \ln \frac{6+3\sqrt{5}}{3}$, $\quad g(Q) = \ln \frac{3+3\sqrt{5}}{6}$

Definišimo f-ju $f: {}_{-4}L_{3\sqrt{5}} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način

$$f((x,y)) = (-1)\left(\ln \frac{x+4+3\sqrt{5}}{y} - \ln \frac{6+3\sqrt{5}}{3} \right)$$

Na osnovu prethodne teoreme f je koordinatni sistem za ${}_{-4}L_{3\sqrt{5}}$ (u f-ji $h_{a,\varepsilon}$ stavimo da je $\varepsilon = -1$ i $a = \ln \frac{6+3\sqrt{5}}{3}$)

Kako je $f(P) = (-1)\left(\ln \frac{6+3\sqrt{5}}{3} - \ln \frac{6+3\sqrt{5}}{3}\right) = 0$ i

$$f(Q) = (-1)\left(\ln \frac{3+3\sqrt{5}}{3} - \ln \frac{6+3\sqrt{5}}{3}\right) = (-1) \underbrace{\ln \underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}}_{<1}}_{<0} > 0$$

to je f tražena mjera.

(#) U Taksi ravni pronađi mjeru f za koju vrijedi da je $f(P)=0$ i $f(Q)>0$, za dati par tački P i Q:

(i) $P(2,3)$, $Q(2,-5)$;

(ii) $P(2,3)$, $Q(4,0)$.

Rj: U rješenju ovog zadatka koristimo sljedeći Teorem:
Ako je f koordinatni sistem za pravu p u metričkoj geometriji i ako je $h_{a,\varepsilon}: p \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$h_{a,\varepsilon}(P) = \varepsilon\,(f(P)-a)$$

tada je $h_{a,\varepsilon}$ koordinatni sistem za p $(a \in \mathbb{R},\ \varepsilon = \pm 1)$.

(i) $P(2,3)$ $Q(2,-5)$

Primjetimo da $P, Q \in L_2$.
Standardna mjera za L_2 je $g: L_2 \to \mathbb{R}$
$(2,y) \to y$

Imamo da je $g(P)=3$, $g(Q)=-5$
Definišimo f-ju $f: L_2 \to \mathbb{R}$ na sljedeći način

$$f(R) = (-1)((g(R))-3)$$

Prema teoremi iznad f je koordinatni sistem za L_2 (primjetimo da smo stavili da je $\varepsilon=-1$ i $a=3$.
Kako je

$$f(P) = (-1)(g(P)-3) = (-1)(3-3) = 0$$

$$f(Q) = (-1)(g(Q)-3) = (-1)(-5-3) = 8 > 0$$

to je f tražena mjera

(ii) $P(2,3)$

$Q(4,0)$ $\quad 2 \neq 4 \Rightarrow P, Q \in L_{k,n}$ za neke $k, n \in \mathbb{R}$

Odredimo ove k i n

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Rightarrow \frac{x-2}{4-2} = \frac{y-3}{0-3} \Rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-3}$$

$$y-3 = -\frac{3}{2}(x-2)$$

$$y-3 = -\frac{3}{2}x + 3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 6 \Rightarrow k = -\frac{3}{2}$$

$$n = 6$$

Tj. $P, Q \in L_{-\frac{3}{2},6}$ Standardna mjera za $L_{-\frac{3}{2},6}$ u takvoj ravni je

$$g : L_{-\frac{3}{2},6} \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to \frac{5}{2}x$$

$|k| = \frac{3}{2}$

$1+|k| = \frac{5}{2}$

Imamo da je $g(P) = \frac{5}{2} \cdot 2 = 5$, $g(Q) = \frac{5}{2} \cdot 4 = 10$.

Definišimo f-ju $f : L_{-\frac{3}{2},6} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način

$$f(M) = (+1)(g(M) - 5)$$

Prema Teoremi s početka zadatka, f je koordinatni sistem za $L_{-\frac{3}{2},6}$.
(gdje smo stavili da je $\varepsilon = +1$ i $a = 5$).

S obzirom da imamo

$$f(P) = g(P) - 5 = 0$$

$$f(Q) = g(Q) - 5 = 10 - 5 = 5 > 0$$

to je f tražena mjera.

(#) Neka je p prava u metričnoj geometriji i neka su $f: p \to \mathbb{R}$ i $g: p \to \mathbb{R}$ dva različita koordinatna sistema za pravu p. Pokazati da postoje $a \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon = \pm 1$ takvi da

$$g(P) = \varepsilon(f(P) - a)$$

za sve $P \in p$.

Rj.

g je mjera za $p \Rightarrow \exists Q \in p$ t.d. $g(Q) = 0$.

· Neka je $a = f(Q)$.

S obzirom da su obe f-je f i g mjere za p, imamo da $\forall P \in p$

$$|g(P)| = |g(P) - g(Q)| = d(P, Q) =$$
$$= |f(P) - f(Q)| = |f(P) - a|$$

Time, za svako $P \in p$

$$g(P) = \pm (f(P) - a) \qquad \dots (*)$$

Tvrdimo da možemo koristiti isti znak za svaku vrijednost od P.

Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da postoji tačka M $(M \neq Q)$ t.d. $g(M) = +(f(M) - a)$ i da postoji tačka $N (N \neq Q)$ t.d. $g(N) = -(f(N) - a)$. Tada

$$d(M, N) = |g(M) - g(N)|$$
$$= |f(M) - a + f(N) - a|$$
$$= |f(M) + f(N) - 2a|.$$

Ali $d(M, N) = |f(M) - f(N)|.$

Time $\quad |f(M)-f(N)| = |f(M)+f(N)-2a|$

i imamo da je ili

$$f(M)-f(N) = f(M)+f(N)-2a$$

ili

$$f(M)-f(N) = -f(M)-f(N)+2a$$

U prvom slučaju $f(N)=a=f(Q)$, a u drugom slučaju $f(M)=a=f(Q)$. U oba slučaja imamo kontradikciju sa činjenicom da je f injektivna.

Prema tome, iz jednakosti $(*)$ imamo da ili

$$g(P) = f(P)-a \quad \text{za sve } P \in \pi$$

ili

$$g(P) = -(f(P)-a) \quad \text{za sve } P \in \pi,$$

što znači da za odgovarajući izbor ε (ili $+1$ ili -1)

$$g(P) = \varepsilon(f(P)-a) \quad \text{za } \forall P \in \pi.$$

Pokazati da svaka prava u metričkoj geometriji ima beskonačno mnogo tački.

Rj. Neka je data metrička geometrija $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, d\}$.

Izaberimo proizvoljnu pravu $p \in \mathcal{L}$.

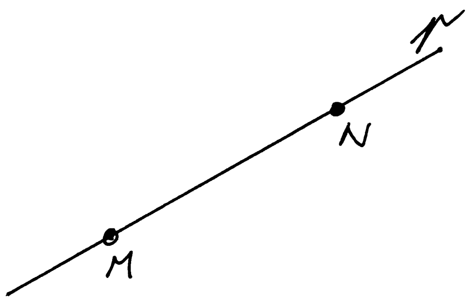
Kako je $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, d\}$ metrička geometrija to za pravu p postoji koordinatni sistem $f: p \to \mathbb{R}$ koji ima osobine

- f je bijekcija
- $|f(P) - f(Q)| = d(P, Q) \quad \forall P, Q \in p$

S obzirom da je f bijekcija, za svaki realan broj $s \in \mathbb{R}$, postoji tačno jedna tačka T t.d. $f(T) = s$. S obzirom da realnih brojeva ima ∞ mnogo to i tački na pravoj p ima ∞ mnogo.

Neka su M i N tačke u metričnoj geometriji. Pokazati da postoji tačka $R \in p = p(M,N)$ takva da $d(M,R) = d(R,N)$.

Rj:



$p = p(M,N)$, $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ metrička geometrija,
Označimo sa f koordinatni sistem za pravu p.
Neka je $f(M) = x$ i $f(N) = y$.

Kako je $f : p \to \mathbb{R}$ surjekcija to za realan broj $\frac{x+y}{2}$ postoji tačka R taka da je $f(R) = \frac{x+y}{2}$.

Pokažimo da je tačka R tražena tačka

$$\left.\begin{aligned} d(M,R) &= |f(M) - f(R)| = \left|x - \frac{x+y}{2}\right| = \frac{|x-y|}{2} \\ d(R,N) &= |f(R) - f(N)| = \left|\frac{x+y}{2} - y\right| = \frac{|x-y|}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(M,R) = d(R,N)$$

q.e.d.

(#) Neka je $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ metrička geometrija i neka je $Q \in \mathcal{S}$. Ako je p prava koja prolazi kroz tačku Q pokazati da za svaki realan broj $r > 0$ postoji tačka $P \in p$ sa osobinom da $d(P, Q) = r$.

Rj. $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ metrička geometrija $\Rightarrow$
- $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ geometrija incidencije
- d je fja udaljenosti
- svaka prava $p \in \mathcal{L}$ zadovoljava postulat mjere

$Q \in \mathcal{S}$, $Q \in p$, $r > 0$ proizvoljno

Neka je $f: p \to \mathbb{R}$ koordinatni sistem za pravu p.

Kako je f surjekcija to za realnu vrijednost $f(Q) - r$ postoji tačka $P \in p$ t.d. $f(P) = f(Q) - r$.

Sad imamo

$$d(P, Q) \overset{d \text{ fja udalj.}}{=} d(Q, P) \overset{p \text{ zad. jedn. mjere}}{=} |f(Q) - f(P)| = |f(Q) - f(Q) + r| = r$$

tj. $d(P, Q) = r$

P je tražena tačka.